Тухайн Дифференциал Тэгшитгэл ба Түүний Нийтлэг Хэрэглээ

Сүхболдын Төгөлдөр

2012 оны 1р сарын 23

Өмнөх Үг

Юуны өмнө энэ семинарт оролцох боломжийг олгосон Төмөр ахдаа баярлалаа. Миний бие астрофизикийн чиглэлээр суралцаж ажилладаг бөгөөд, өөрийн зарим нэг лекцийн тэмдэглэлүүдээ эмхтгээд Монгол хэлнээ хөврүүлвэл физик болон инженерийн чиглэлээр суралцаж буй Монгол оюутнуудад хэрэгтэй, сонирхолтой байх болвуу гэж бодсоны үүднээс энэхүү цуврал лекцийг бичхээр шийдлээ. Мэдээж надад энэ нь зарим нэг мартсан зүйлсээ эргүүлэн санах, зарим нэг зүйлсийг илүү сайн шингээж ойлгох гэх мэт олон талын ач тустай байна.

Энэхүү цуврал лекц ерөнхийдөө тухайн дифференциал тэгшитгэлийн тухай анхан шатны ойлголтыг танд олгоно. Зарим төрлийн ТДТ-г янз янзын аргаар бодох замаар танд математик загварчлал болон шийдийг анализ хийх зарим арга барилыг мөн сургана. Хэрэглээний математик талаас асуудалд хандаж буй учир аливаа шийдийн оршихуйн тухай нарийн ширийнийг энд дурдахгүй. Гэхдээ шугаман алгебрт өргөн хэрэглэгддэг арга техникийг харуулсан зарим баталгааг хийнэ. Ерөнхийдөө Төмөрөө болон Үүеэ ах нарын нийтлэл дээрх шиг mathematical rigor гэж хэлдэг зүйл байхгүй гэсэн үг. Тооцоолон бодолтын (numerical solutions) аргуудыг энд дурьдахгүй одоогоор, гэхдээ ирээдүйд энэ цувралыг агуулга талаас нь улам өргөжүүлэхийг зорьж байна.

Миний бие их сургуулийн түвшинд математик болон физикийг Монгол хэл дээр үзээгүй учираас орчуулгын болоод үг үсэгийн алдаа сэлт элбэг байх вий гэж анхааруулж байна. Үнэхээр эргэлзээтэй орчуулагдаж байгаа хэсгийн ард нь англиар бас хавсаргаж байх болно.

Энд бичигдсэн материалтай холбоотой асуулт, санал, хүсэлтээ блогт сэтгэгдэл бичих журмаар үлдээнэ үү.

1 Ерөнхий Ойлголт

1.1 Товч Танилцуулга

Ерөнхий Математик Тодорхойлолт - аливаа функц болон түүний тухайн уламжлалын функциональ хамаарлыг тухайн дифференциал тэгшитгэл гэнэ (үүнээс цааш ТДТ).

$f : \mathbb{R}^n$ байг (ө.х f нь n хэмжээс бүхий бодит орон зай дахь функц), тэгвэл ТДТ-ийн хамгийн ерөнхий хэлбэр нь:

$$F(x_i; f; \frac{\partial f}{\partial x_i}; \frac{\partial^2 f}{\partial x_i xj}; ...) = 0$$

- Тухайн ТДТ-ийн эрэмбэ нь тэгшитгэл дахь хамгийн өндөр эрэмбийн уламжлалаар тодорхойлогдоно
- Хэрэв $f = 0$ нь дурын цэг дээр шийд байвал тэр ТДТ-г нэгэн-төрлийн ТДТ гэнэ
- Хэрэв F нь f болон түүний тухайн уламжлалуудын шугаман эвлүүлэгээс бүрдэж байвал түүнийг шугаман ТДТ гэнэ

Аливаа ТДТ-ийн хамгийн ерөнхий илэрхийлэл нь:

$$F = a_0(x_1, x_2, ..., x_n)f + \sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, x_2, ..., x_n)\frac{\partial f}{\partial x_i} + \\ \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{n} a_{ij}(x_1, x_2, ..., x_n)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j} + ... + b(x_1, x_2, ..., x_n)$$

Дараах тэгшитгэлүүдийг шугаман эсэх, нэгэн төрөлийнх эсэхийг нь эрэмбийн хамт тодорхойлно уу:

$$f_x + f_y = 0$$
$$f_{xx} + f_y x = 0$$
$$3xf_x + f_{yy} = 4$$
$$f_y + f_x f_{yy} = 0$$

(энд $f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $f_{xx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ гэх мэт)

1.2 Байгаль дахь Бодит Системуудын ТДТ

- Байгаль нь бидний заншсанаар 3 орон зайн хэмжээс + 1 цаг хугацааны хэмжээсээр дүрслэгддэг (мэдээж физикт үүнээс олон хэмжээс бий)
- Байгаль дахь системуудыг дүрсэлж буй ТДТ-үүд нь ихэнх тохиолдолд энэ 4 хэмжээс эсвэл үүний дэд олонлог болох хэмжээст байна
- Байгаль дахь системийг ТДТ нь загварчлахыг оролдох үед 3 үндсэн шатаар дамжина:
  1. Тухайн системийг загварчилж буй ТДТ-г угсрах
  2. ТДТ-ийн шийдийг олох
  3. Бодолтоо нягтлан шалгах (ТДТ нь зөв бол хариу нь зөв эсэх, эсвэл ТДТ нь өөрөө зөв эсэх)

Энэ цуврал лекц нь (2) болон (3) дээр түлхүү анхаарах боловч (1)-ийн талаар дурьдах хэрэгтэй 2 чухал зүйл байна:

Коввариант - аливаа физик процесс нь ямар тооллын систем дээр байгаагаа мэдэхгүй, тиймээс бидний олохыг зорьж буй шийд маань аливаа тооллын системээс хамааралгүй байх ёстой.

Жишээ нь Лапласын тэгшитгэлийг авч үзье: $\nabla^2 f = 0$
-картезийн тооллын систем дээр:
$\partial_{xx} f + \partial_{yy} f + \partial_{zz} f = 0$
-бөмбөлгөн тооллын систем дээр:
$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2} = 0$
f нь ямар ч тооллын систем дээр илэрхийлэгдсэн бай, тэрхүү тооллын систем дээрх $\nabla^2 f = 0$-ын шийд нь байх ёстой.

Бид дифференциал тэгшитгэл угсарах гэж буй учир, дээрх зарчмын дагуу бидэнд тооллын системээс хамааралгүй операторууд хэрэгтэй - $\nabla\cdot, \nabla^2, \nabla\times$

Тооллын системийн сонголт - тооллын системийг сайтар тунгааж сонгосноор өгөгдсөн ТДТ-д харьцангуй хялбар бодолтыг олох боломжтой. Үүнд 2 үндсэн зүйлийг анхаарах хэрэгтэй:

-хилийн нөхцөлийн ”хэлбэр”
-бодлогын тэгш хэм (ө.х бодлогын хэмжээсийг цөөрүүлэх)

(Одоохондоо энэ дээр бичигдсэн зарим зүйлсийн талаар санаа зоволтгүй, дараачийн лекциэс эхлээд яг бодлого дээр тулж ажиллахаар аажимдаа өөрөө ойлгомжтой болно)

1.3 Нийтлэг Хэрэглэгддэг ТДТ-үүдийн Ерөнхий Араншин

Энэ цуврал лекц нь ихэнхидээ 2р эрэмбийн шугаман ТДТ-эй зууралдах болно. Ийм ТДТ-үүд нь зөвхөн 3-хан төрлийн араншинтай байна гэдгийг баталж болох (нилээн сүүлд нэмэгдэх каноник хэлбэрийн тухай лекцэн дээр батална) бөгөөд эдгээр араншингуудыг физикт маш түгээмэл хэрэглэгддэг дараах 3 тэгшитгэл агуулна:

- Долгионы Тэгшитгэл
- Дулааны Тэгшитгэл (Диффузийн тэгшитгэл)
- Лапласын Тэгшитгэл (Пойссоны тэгшитгэл)

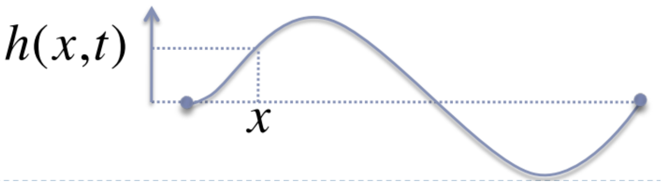
Ингээд зарим тэгшитгэлүүдийн чанарууд болон тэдний дүрсэлдэг байгаль дээрх физик үзэгдлүүдийн жишээдээс сонирхоё.

1) Долгионы Тэгшитгэл

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 f$$

, энд c нь долгионы хурд. Жишээ нь нэг хэмжээст долгионы тэгшитгэл нь хүчлэг бүхий утсан дээрх шилжилтийн долгионыг илэрхийлнэ (ж.нь гитарын утас).

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$



Энэ тэгшитгэл нь утсан дээрх янз бүрийн горим бүхий зогсонги долгионуудыг, мөн тархаж буй долгионыг ойлтынх нь хамт дүрсэлнэ. Өөр нэг хэмжээст долгионы жишээ гэвэл даралтын долгионууд байна - дууны долгион, сейсмик долгион гэх мэт:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

Хоёр хэмжээс дээрх долгионууд нь мөн төстэй шинж чанартай байна (янз бүрийн горим бүхий зогсонги долгионууд болоод даралтын долгион түүний ойлт гэх мэт).

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = c^2 (\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2})$$

Жишээ гэвэл усны гадрага дээрх бага далайцтай гадрагын долгион (тогтмол усанд жижиг чулуу шидэх үед үүсэх долгион), мөн хүчлэг бүхий гадрагын чичиргээнүүд (гитар бөмбөрийн гэх мэтийн чичирхийлж буй гадрага).

Мэдээж үүнээс олон хэмжээс дээрх долгионууд байх бөгөөд мөн л төстэй шинж чанартай байна. Жишээ нь одод болон гаригуудын 3 хэмжээст сейсмик долгион, цахилгаан соронзон долгион (гэрэл) гэх мэт.

Олон өөр төрлийн долгионууд ийм энгийн тэгшитгэлээр дүрслэгдэхгүй. Далайн ёроол дахь хүчтэй газар хөдлөлтөөс үүдэлтэй цунами нь сул шугаман бус (weakly non-linear) долгионы сонгодог жишээ, мөн далай болон нуурын эрэг дээр задарч буй усны гадаргын долгионууд нь маш шугаман бус байх бөгөөд математикийн үүднээс одоог хүртэл сайн ойлгогдоогүй болно.

2) Диффузийн Тэгшитгэл

$$\frac{\partial f}{\partial t} = k \nabla^2 f$$

, энд k нь диффузийн тогтмол. Долгионы тэгшитгэлээс ялгарах ганц зүйл нь цаг хугацааны уламжлал нь нэгдүгээр эрэмбийнх байгааг анзаараарай. Хамгийн нийтлэг жишээ бол дулааны диффузи (дулааны тэгшитгэл). Бидний өдөр тутмын амьдралд байнга тааралддаг үйл явц учираас энэ тэгшитгэлийн шийд нь ямархуу чанартай байх тухай бид сайн физик мэдрэмжтэй байдаг. Дараах нэг хэмжээст дулааны тэгшитгэлийг хилийн болон анхны нөхцөлийн хамт авч үзнэ үү:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$T(x,0) = 0; \quad T(0,t) = 100; \quad T(L,t) = 0$$

Энэ өгөгдөлүүд нь анхандаа тэр чигтээ 0 градусын температурт байсан нэг хэмжээст L гэсэн урттай төмөр шон нэг талаа 100 градусын нөгөө талаа 0 градусын орчинтой залгаснаар шонгийн биеийн бусад хэсгийн температур хэрхэн хувьсах вэ гэсэн асуулттай ижил. Энэ бодлогын аналитик шийд болох дараах функцийг

$$T(x,t) = 100(1 - x/L) - \sum_n \frac{200}{n\pi} cos(n\pi) sin(n\pi x/L) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}kt}$$

хүн бүр шууд хараад хэлж чадахгүй ч ерөнхий температурын хувьсалыг мэдрэмжээрээ барагцаалж чадна.

Диффузийн тэгшитгэл нь мөн магадлалын тархалтын функцийн хувьсалыг тасралтгүйгээр дүрслэх нэг арга зам юм. Жишээ нь аягтай усанд чернилийн дусал хийснээр чернилийн молекулууд нь усны молекулуудтай мөргөлдөн хийх санамсаргүй алхалтын (random walk) үйл явцыг бөмбөлгөн тооллын систем дээр магадлалын тархалтаар нь

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{k}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial M}{\partial r})$$

гэж барагцаалан илэрхийлж болно.
Энд нэг анхаарах зүйл нь диффузийн тэгшитгэл болон шилжилтийн тэгшитгэлийн (шингэний динамикт чухал) ялгаа юм.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\nabla \cdot (uf)$$

, энд u нь f гэсэн зүйлийг шилжүүлж байгаа шилжилтийн хурдны орон. Эндээс шилжилтийн тэгшитгэл нь функцийг ”гөлгөр” болгож (smooth out) байгаа бус зөвхөн хольж хутгаж байгаа гэдэг нь харагдна. Харин диффузи нь тухайн функцийг ”гөлгөр” болгох процесийг дүрслэх бөгөөд шилжилтийн тэгшитгэл шиг цаг-хугацааны хувьд ухрааж болохгүй юм.

3) Лапласын Тэгшитгэл

$$\nabla^2 f = 0$$

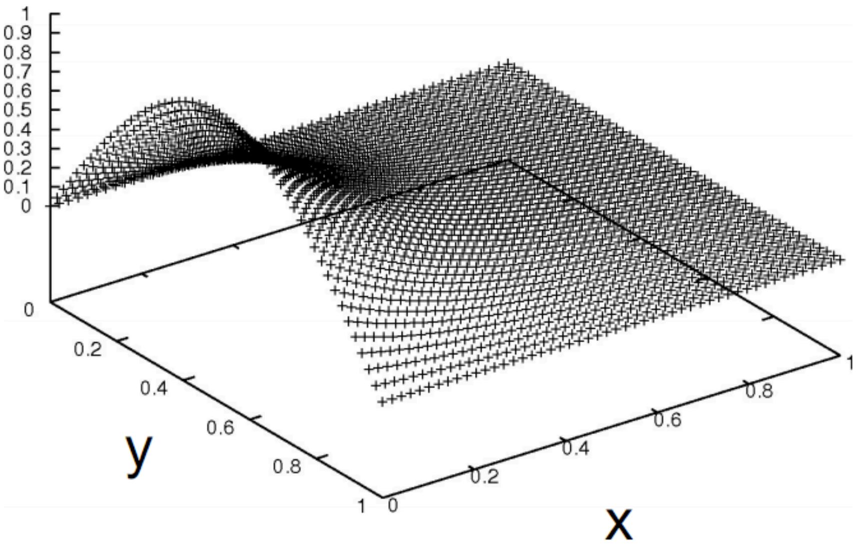
Энэ тэгшитгэлийг ямарваа нэгэн диффузийн үйл явцын ”бүтээгдэхүүн” гэж харж болно, өөрөөр хэлбэл тухайн систем бүх цаг хугацааны хувьсалаа дуусгаад тогтвортой төлөвт хүрсэний дараа нь гэсэн үг:

$$\frac{\partial}{\partial t} \to 0 \quad \text{үеийн} \quad \frac{\partial f}{\partial t} = k^2\nabla^2 f$$

Тиймээс энэ тэгшитгэлийн шийдүүд нь хилийн нөхцөлүүдийг хангаж буй хамгийн боломжит "гөлгөр" функцууд байна. Дараах хилийн нөхцөлүүдийг хангах хоёр хэмжээс дээрх лапласын тэгшитгэлийн

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$
$$f(0,y) = sin(\pi y); \quad f(1,y) = 0; \quad f(x,0) = f(x,1) = 0$$

бодолтыг дүрсэлвэл



Зарим тохиолдолд лапласын тэгшитгэлийг диффузийн тэгшитгэлийн "бүтээгдэхүүн" гэдэг үүднээс харах нь шийдийг нь "таахад" мөн тусалж болно. Жишээ нь дараах хилийн нөхцөлийг хангаж байх шийдийг лапласын тэгшитгэлд хайж байлаа гэж бодоё:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} = 0$$
$$f(1,\theta,\phi) = 10$$

"Температуураар" бодох юм бол энэ нь бүх цаг хугацааны турш $f = 10$ гэсэн температур дээр гадрагын ($r = 1$) температурыг барьж буй тогтвортой төлөвийн тэнцвэрийг бөмбөлөг дээр дүрсэлж буй лапласын тэгшитгэл, тиймээс шийд нь ердөөсөө л:

$$f(r, \theta, \phi) = 10$$

2 Хувьсахуудыг Тусгаарлах Арга (тогтмол коефиценттэй шугаман тэгшитгэлүүдэд)

Энэ лекц болон үүний дараачийн лекциэр бид хэрхэн шугаман 2р эрэмбийн (мөн үүнээс дээших эрэмбэд ашиглаж болно) тогмол (жаахан нэмэлт ажиллагатайгаар тогтмол бус) коефиценттэй ТДТ-г бодох талаар судлана. Энэ арга нь сүперпозицийн зарчмын үр дүн бөгөөд тэгшитгэлийн шугаман шинж чанар дээр суурилсан болно.

1) Шугаман шинж чанар ба суперпозицийн зарчим

f нь мэдэгдэж байгаа ба $\mathcal{L}$ нь u дээр үйлчилж байгаа оператор бол ТДТ-г дараах хэлбэрээр илэрхийлж болно. Жишээ нь дулааны тэгшитгэлийн хувьд:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{cases} \mathcal{L} = \dfrac{\partial}{\partial t} - k\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \\ f = 0 \end{cases}$$

Тодорхойлолт: u_1 болон u_2 нь функциуд ба c_1 болон c_2 нь тогтмолууд бөгөөд дараах нөхцөл хангагдаж байвал оператор $\mathcal{L}$ нь шугаман байна:

$$\mathcal{L}(c_1u_1 + c_2u_2) = c_1\mathcal{L}(u_1) + c_2\mathcal{L}(u_2)$$

Өөрөөр хэлбэл дулааны тэгшитгэлийн хувьд:

$$\mathcal{L}(c_1u_1 + c_2u_2) = \frac{\partial}{\partial t}(c_1u_1 + c_2u_2) - k\frac{\partial^2}{\partial x^2}(c_1u_1 + c_2u_2) =$$
$$c_1(\frac{\partial u_1}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}) + c_2(\frac{\partial u_2}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}) = c_1\mathcal{L}(u_1) + c_2\mathcal{L}(u_2)$$

Тодорхойлолт: хэрэв оператор $\mathcal{L}$ нь шугаман бол $\mathcal{L}(u) = f$ ТДТ нь шугаман байна. (хэрэв $f = 0$ байвал нэгэн-төрлийн байна, харин $f \neq 0$ байвал нэгэн-төрлийн бус байна)

Энэ шугаман шинж чанарын тодорхойлолтоос бид нэгэн-төрлийн шугаман ТДТ-уудын талаар чухал нэгэн зүйлийг харж болно.

Сүперпозицийн зарчим

Хэрэв u_1 болон u_2 нь өгөгдсөн шугаман нэгэн-төрлийн ТДТ-ийн шийдүүд нь бол, аливаа тогтмол c_1 болон c_2-ийн хувьд $v = c_1u_1 + c_2u_2$ нь мөн шийд байна. (ө.х аливаа шийдүүдийн шугаман комбинаци нь мөн шийд байна). Энэ зарчим нь хувьсахуудыг тусгаарлах аргын амин зүрх нь юм.

Хилийн нөхцөлүүдийн шинж чанар

Хилийн нөхцөлүүд нь $x = x_A$ дээр $\mathfrak{B}_A(u) = g_A$, ба $x = x_B$ дээр $\mathfrak{B}_B(u) = g_B$ бол, $\mathfrak{B}_A$ болон $\mathfrak{B}_B$ нь шугаман үед хилийн нөхцөлүүд нь шугаман байна. Хэрэв $g_A = g_B = 0$ бол хилийн нөхцөлүүдийг нэгэн-төрлийн гэнэ.

2) Хувьсахуудыг Тусгаарлах нь (хоёр хувьсахтай тэгшитгэлийн хувьд)

Дараах арга нь шугаман, нэгэн-төрлийн хилийн нөхцөл бүхий тогтмол коефицэнттэй ямар ч шугаман нэгэн-төрлийн ТДТ-үүд дээр хэрэглэгдэж болно. Дараа нь бид тусад нь нэгэн-төрлийн бус ба тогтмол бус коефицэнттэй тэгшитгэлүүдийг авч үзнэ. Эхлээд дулааны тэгшитгэлийн жишээг авч үзье:

А. Математик болон Физик Асуулт

$$\text{Математик бодлого} \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = 0 \qquad (*) \\ u(L,t) = 0 \qquad (*) \\ u(x,0) = f(x) \quad (**) \end{cases}$$

Энд (*) нь хилийн нөхцөлүүд бөгөөд (**) нь анхны нөхцөл болно. Энэ бодлого нь, жишээ нь, хугацаа $t = 0$ үед хоёр ирмэг нь $T = 0$ температур дээр мөн их бие нь $T(x) = f(x)$ гэсэн температурын орчинд байх бүх ирмэгээрээ тусгаарлагдсан нэг хэмжээст дамжуулагч метал шон байж болно.

Б. Хувьсахуудыг Тусгаарлах

Гол санаа нь энэ ТДТ-г хангах суурь фүнкциудыг сүперпозицийн зарчмын дагуу угсран ерөнхий шийдийг олох юм. Ерөнхий шийд нь $u(x,t) = A(x)B(t)$ гэж үзье (энд хувьсахууд нь ”тусгаарлагдсан” байна). ТДТ-дээ энэ хэлбэрийг орлуулвал:

$$A(x)\frac{dB}{dt} = kB(t)\frac{d^2A}{dx^2}$$

$A(x)B(t)$-р хуваавал:

$$\frac{1}{B}\frac{dB}{dt} = \frac{k}{A}\frac{d^2A}{dA^2}$$

, энд тэгшитгэлийн нэг тал нь зөвхөн цаг хугацааны фүнкц, нөгөө тал нь зөвхөн орон зайн фүнкц болсон байна. Энэ хоёр тал нь нэг тогтмолтой л тэнцэж байж энэ тэнцвэр нь бүх хугацаа t болон бүх орон зай x-ийн хувьд хангагдана.

$$\frac{1}{B}\frac{dB}{dt} = \frac{k}{A}\frac{d^2A}{dA^2} = \lambda$$

энэ тогтмолыг тусгаарлалын тогтмол гэнэ.

Ингээд бид анхны эхэлсэн ТДТ-г зөвхөн λ тогтмолоор хослогдсон хоёр Ердийн Дифференциал Тэгшитгэл (үүнээс цааш ЕДТ) болголоо:

$$\begin{cases} \frac{1}{B}\frac{dB}{dt} = \lambda \\ \frac{k}{A}\frac{d^2A}{dA^2} = \lambda \end{cases}$$

Одоо бид нэг нэгээр нь анализ хийж болно.

B. Орон Зайн Бодлогын Шийдүүд

Орон зайн бодлого маань одоо хувийн утгын (eigenvalue) бодлого болсон байна:

$$\begin{cases} \frac{k}{A}\frac{d^2A}{dA^2} = \lambda \\ A(0) = 0; \quad A(L) = 0 \end{cases}$$

(бүх хугацаа t-ийн хувьд $u(0,t) = u(L,t) = 0$ учираас)

Энд хэрхэн λ нь орон зайн бодлогын хувийн утга болж, харин A нь хувийн функц болсоныг анзаараарай. ($k\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ нь A дээр үйлчилж буй оператор, λ нь A-г үржиж буй хувийн утга)

λ-аас хамааран 3 янзын шийд байж болно:

1. $\lambda > 0$ бол $A(x) = a_1 e^{\sqrt{\lambda/kx}} + a_2 e^{-\sqrt{\lambda/kx}}$
2. $\lambda = 0$ бол $A(x) = a_1 + a_2 x$
3. $\lambda < 0$ бол $A(x) = a_1 \cos\sqrt{\frac{-\lambda}{k}}x + a_2 \sin\sqrt{\frac{-\lambda}{k}}x$

Хилийн нөхцөлүүдээс үзвэл зөвхөн 3-р шийд нь хялбар бус (тэг-бус) шийд өгнө (өөрөө шалгаж үзнэ үү):

$$A(x) = a_1 \cos\sqrt{\frac{-\lambda}{k}}x + a_2 \sin\sqrt{\frac{-\lambda}{k}}x$$

$$A(0) = 0 \to a_1 = 0; \quad A(L) = 0 \to a_2 \sin\sqrt{\frac{-\lambda}{k}}L = 0$$

Бид энд $a_2 = 0$ гэж авч болохгүй, эс бөгөөс бид хялбар шийдтэй л үлднэ. Тиймээс $\sin\sqrt{\frac{-\lambda}{k}}L = 0$ гэдгээс бид хувийн утгыг тодорхойлж болно:

$$-\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}k$$

мэдээж n нь бүхэл тоо байна.

Хязгааргүй олон хувийн утга байгааг анзаараарай. Тиймээс хувийн утга болгонд харгалзсан хувийн функц байна:

$$A_n(x) = \sin\sqrt{\frac{-\lambda_n}{k}}x = \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, .., \infty$$

Бид анх орон зайн бодлогын шийдийг хайж эхлээд, одоо хувийн утга бүрт орон зайн тэгшитгэлийг хангах хязгааргүй олон боломжит хувийн-горимуудыг(eigenmodes) олоод байна. Яагаад ийм үр дүнд хүрсэн нь дараа нь илэрхий болно.

Аливаа хувийн утгын бодлогонд хамгийн сүүлийн шийдийг угсарах үед бүх нормализацийн тогтмолуудыг нэгтгэж болох учир одоохондоо a_2-ийг хаясан шиг тогтмолуудыг орхиж болно.

Г. Хугацааны Бодлогын Шийдүүд

Бид хувийн утга бүрт харгалзах хязгааргүй олон шийдийг орон зайн бодлогонд олсон учир, хугацааны бодлогын хувьд мөн адил дараах тэгшитгэлийг хангах хязгааргүй олон шийдтэй байна:

$$\frac{1}{B_n}\frac{dB_n}{dt} = \lambda_n \quad \rightarrow \quad \frac{dB_n}{dt} = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}kB_n$$

Шийдүүд нь:

$$B_n(t) = e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}kt}$$

Д. Сүперпозицийн Зарчим

Одоогоор бид дараах хэлбэрийн хязгааргүй олон суурь тэгшитгэлүүдийг олоод байна:

$$u_n(x,t) = A(x)B(t) = b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}kt} sin(\frac{n\pi x}{L}), \quad n = 1, 2, .., \infty$$

$u_n(x,t)$-ийн аливаа шугаман комбинаци нь ТДТ-ийн бодолт учир

$$u(x,t) = \sum_n b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}kt} sin(\frac{n\pi x}{L})$$

,нь мөн дулааны тэгшитгэлийн маань ерөнхий шийд байна. (энд b_n нь дээр хэлсэнчлэн бүх өмнөх тогтмолуудыг агуулж байгаа)

Бид одоогоор ТДТ-г хилийн нөхцөлүүдийн хамт хангах ерөнхий шийдийг олоод байна. Одоо ганц үлдсэн юм нь анхны нөхцөл буюу хугацааны нөхцөл. Түүнийг ашиглан бид тогтмолын утгыг олох болно.

Е. Зарим Хялбар Анхны Нөхцөлүүд

Жишээ 1: Анхны нөхцөл нь дараах функцээр илэрхийлэгдсэн байг

$$u(x,0) = 10sin(\frac{4\pi x}{L})$$

Тэгвэл $t = 0$ үед:

$$10sin(\frac{4\pi x}{L}) = \sum_n b_n sin(\frac{n\pi x}{L})$$

Энд шийд нь $n = 4$ үед $b_4 = 10$ байх ба бусад бүх n-ийн хувьд $b_n = 0$ гэдэг нь илэрхий харагдаж байна. Бидний дулааны бодлогын сүүлийн шийд маань:

$$u(x,t) = 10e^{-\frac{16\pi^2}{L^2}kt} sin(4\pi x/L)$$

болно - далайц нь зэрэгтээр буурж буй sin функц байна.

Жишээ 2: Анхны нөхцөл нь дараах функцээр илэрхийлэгдсэн бол:

$$u(x,0) = 2sin(\frac{\pi x}{L}) + 100sin(\frac{10\pi x}{L})$$

Түрүүчийн жишээний адилаар $b_1 = 2$, $b_{10} = 100$ ба $n \neq 1,\ n \neq 10$ үед $b_n = 0$ байна гэдэг нь илэрхий байна:

$$u(x,t) = 2e^{-\frac{\pi^2}{L^2}kt} sin(\frac{\pi x}{L}) + 100e^{-\frac{100\pi^2}{L^2}kt} sin(\frac{10\pi x}{L})$$

Диффузийн үйл явцын нэгэн чухал физик шинж чанар нь жижиг хэмжээс (scale) нь том хэмжээснээсээ хамаагүй түрүүнд диффузлэгдэнэ. Энэ жишээний хувьд хурдтай хэлбэлзэж буй $sin(10\pi x/L)$ нь $100\pi^2 k/L^2$ гэсэн бууралтын ”хурдтай” байхад, удаан хэлбэлзэж буй $sin(\pi x/L)$ нь $\pi^2 k/L^2$ гэсэн 100 дахин бага бууралтын хурдтай байна.